数理解析研究所講究録 1309 巻 2003 年 31-38

Oscillatory solutions of semilinear elliptic equations with nonlinear perturbed terms in exterior domains

島根大学 総合理工学研究科 山岡直人 (Naoto Yamaoka)
島根大学 総合理工学部 杉江実郎 (Jitsuro Sugie)
Department of Mathematics
Shimane University

半線形楕円型方程式

$$\Delta u+p(x)u+\phi(x,u)=0, \qquad \Delta=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{E}$$

の外部領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\geq 3)$ における解の振動について考える。ただし，領域 Ω は $G_a:=\{x\in\mathbb{R}^N:|x|>a\}$ を含む。一般に，ある正の a に対して，G_a を含む領域を外部領域と呼ぶ。方程式 (E) の関数 $p(x)$, $\phi(x,u)$ に次の仮定をする。

(i) 関数 $p(x)$ は非負かつ任意の有界領域 $M\subset\Omega$ に対し，$\overline{M}$ 上で α 次 Hölder 連続 $(\alpha\in(0,1))$ である。

(ii) 関数 ϕ は非負かつ任意の有界領域 $M\subset\Omega$, 任意の有界区間 $J\subset\mathbb{R}$ に対し，$\overline{M}\times\overline{J}$ 上で α 次 Hölder 連続 $(\alpha\in(0,1))$ である。

簡単のため，2つの関数空間を定義しておく。任意の有界領域 $M\subset\mathbb{R}^N$ の閉包 $\overline{M}$ 上の関数 $u:\overline{M}\to\mathbb{R}$ の α 次 Hölder norm $||u||_{2+\alpha,\overline{M}}$ が有界となる集合を $C^{2+\alpha}(\overline{M})$ で表す。また，関数 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ が任意の有界領域 $M\subset\Omega$ に対して $C^{2+\alpha}(\overline{M})$ となるような u の集合を $C^{2+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ と表す。

関数 $u\in C^{2+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ がすべての $x\in\Omega$ に対して方程式 (E) を満たすとき，$u(x)$ は方程式 (E) の解であると呼び，同様に，関数 $u\in C^{2+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ がすべての $x\in\Omega$ に対して不等式

$$\Delta u+p(x)u+\phi(x,u)\leq 0 \ (\text{または}, \geq 0)$$

を満たすとき，$u(x)$ は方程式 (E) の supersolution (または，subsolution) と呼ぶ。

本研究では，方程式 (E) の解 $u(x)$ が任意の外部領域で正値でも負値でもないとき，$u(x)$ は振動するといい，逆に，方程式 (E) の解 $u(x)$ がある外部領域で正値または負値のとき，$u(x)$ は振動しないという。

関数 $\phi(x,u)$ が零の場合，方程式 (E) は線形方程式

$$\Delta u+p(x)u=0 \tag{1}$$

となる。関数 $p(x)$ が

$$p(x)=\frac{\mu}{|x|^2}, \qquad \mu>0 \tag{2}$$

の場合を考える。条件 (2) を満たす方程式 (1) の球対称解は以下のように具体的に解くことができるので，定数 μ によって，方程式 (1) が振動しない解をもつかどうかを判定することができる：

$$u(x) = \begin{cases} (K_1 + K_2 \log t(x)) \left(\dfrac{1}{t(x)}\right)^{1/2}, & \text{if } \mu = \lambda_N, \\ (K_3 t(x)^{\zeta} + K_4 t(x)^{-\zeta}) \left(\dfrac{1}{t(x)}\right)^{1/2} & \text{if } \mu \neq \lambda_N. \end{cases}$$

で与えられる。ただし，$\lambda_N = (N-2)^2/4$, $t(x) = (N-2)|x|^{N-2}$ かつ K_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ は任意定数であり，ζ は

$$((N-2)\zeta)^2 = \lambda_N - \mu$$

の根である。よって，$0 < \mu \leq \lambda_N$ のとき，(2) を満たす線形方程式 (1) は振動しない解をもち，$\mu > \lambda_N$ のとき，すべての球対称解は振動する。このように，線形方程式 (1) では定数 λ_N が解の振動について重要な役割をもつ。

線形方程式 (1) が振動しない解をもつための係数 $p(x)$ に関する条件をもう少し詳しく調べるために，三つの関数列を以下のように定義する：

$$\log_1 t = |\log t|, \quad \log_{k+1} t = \log\{\log_k t\}; \qquad l_1(t) = 1, \quad l_k(t) = l_k(t) \log_k(t);$$

$$S_k(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\{l_i(t)\}^2}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

これらの関数列 $\{\log_k(t)\}$, $\{l_k(t)\}$ と $\{S_k(t)\}$ は $t > 0$ が絶対値の十分大きな範囲と小さな範囲で定義される。具体的に関数列 $\{l_k(t)\}$, $\{S_k(t)\}$ をいくつか列挙すると

$$\begin{aligned} & l_2(t) = |\log t|, \qquad l_3(t) = |\log t|(|\log|\log t||), \ldots; \\ & S_1(t) = 1, \qquad S_2(t) = 1 + \frac{1}{(\log t)^2}, \\ & S_3(t) = 1 + \frac{1}{(\log t)^2} + \frac{1}{(\log t)^2(\log(|\log t|))^2}, \ldots \end{aligned}$$

となる。

数列 $S_n(t)$ を用いて

$$p_n(x) = \frac{\lambda_N}{|x|^2} S_n(t(x))$$

とおくと，線形方程式

$$\Delta u + p_n(x) u = 0$$

は振動しない解

$$u(x) = (K_1 + K_2 \log_n(t(x))) \left(\frac{l_n(t(x))}{t(x)}\right)^{1/2}$$

をもつ。ただし，K_1, K_2 は任意定数である。

本研究の目的は，このような振動しない解をもつ線形方程式 (1) に非線形摂動項 $\phi(x, u)$ を加えたとき，その影響によって，振動しない解が振動するようになるかどうかを調べることである。

方程式 (E) が振動しない解をもつための条件を与えるため，Noussair and Swanson [3] の "supersolution - subsolution method" を用いる。この手法は，外部領域で正の supersolution とそれより小さい正の subsolution が存在するならば，その supersolution と subsolution の間に方程式 (E) の解が存在することを示している。

Lemma 1. $C_b = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = b\}$ とおく。領域 $G_b \cup C_b$ で，方程式 (E) の正の supersolution $\overline{u}(x)$ と正の subsolution $\underline{u}(x)$ が存在し，$\underline{u}(x) \le \overline{u}(x)$ を満たすとする。このとき，方程式 (E) は

$$\underline{u}(x) \le u(x) \le \overline{u}(x), \quad x \in G_b, \qquad u(x) = \overline{u}(x), \quad x \in C_b$$

を満たす解 $u(x)$ をもつ。

方程式 (E) の supersolution と subsolution を見つけるため，Sugie [4, Theorem 2.2] が与えた常微分方程式

$$w'' + \frac{2}{t}w' + \frac{1}{4t^2}S_n(t)w + \frac{1}{t^2}g(w) = 0, \qquad ' = \frac{d}{dt} \tag{3}$$

の非振動解の存在定理を利用する。ただし，関数 g は局所的 Lipschitz 連続と

$$wg(w) > 0, \qquad w \neq 0 \tag{4}$$

を満たすものとする。

Proposition 1. 条件 (4) を仮定する。このとき，絶対値が十分小さな $w > 0$（または，$w < 0$）に対して，関数 $g(w)$ が

$$\frac{g(w)}{w} \le \frac{1}{4\{l_{n+1}(w^2)\}^2} \tag{5}$$

を満たすならば，方程式 (3) は振動しない解をもつ。

方程式 (3) と同値な Liénard 方程式系

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta - \xi, \\ \dot{\eta} &= -\frac{1}{4}S_n(e^s)\xi - g(\xi), \end{aligned} \qquad \dot{} = \frac{d}{ds}, \qquad s = \log t \tag{6}$$

を考える。方程式系 (6) の零解の大域的漸近安定は Sugie [4, Lemma 3.2] によって証明されているので，Proposition 1 で得た方程式 (3) の振動しない解 $w(t)$ は減衰する。すなわち，

$$\lim_{t \to \infty} w(t) = 0 \tag{7}$$

である。方程式系 (6) を相平面解析することによって，減衰する速さも以下のように評価できる。

Lemma 2. 条件 (4) を仮定する。このとき，絶対値が十分小さな $w > 0$ に対して条件 (5) が成り立つならば，方程式 (3) は

$$w(t) \ge \frac{Tw(T)}{t} \quad (t \ge T)$$

を満たす解 $w(t)$ をもつ。

Proof. 関数 g は条件 (4), (5) と Proposition 1 より，方程式 (3) は正値解 $w(t)$ をもつ。すなわち，ある $T>0$ に対して，$w(t)>0$ $(t\geq T)$ である。正値解 $w(t)$ を用いて $(\xi(s),\eta(s))$ を

$$(\xi(s),\eta(s)) = (w(t),\ w'(t)t+w(t))\,, \qquad s=\log t$$

で定義すると，$(\xi(s),\eta(s))$ は方程式系 (6) の解となる。関数 $S_n(e^s)>0$, $\xi(s)>0$ $(s\geq \log T)$ なので，条件 (4) より $\dot{\eta}(s)<0$ $(s>\log T)$ である。したがって，$\eta(s_0)<0$ となる $s_0>\log T$ が存在するならば

$$\dot{\xi}(s)=\eta(s)-\xi(s)<\eta(s_0) \qquad (s\geq s_0)$$

である。この微分不等式を解くと

$$\xi(s)<\eta(s_0)(s-s_0)+\xi(s_0)\to -\infty \qquad (s\to\infty)$$

となる。これは $\xi(s)>0$ $(s\geq\log T)$ であることに矛盾する。よって，$\eta(s)\geq 0$ $(s\geq \log T)$ である。このことから

$$\dot{\xi}(s)=\eta(s)-\xi(s)\geq -\xi(s), \qquad s\geq \log T$$

となる。この不等式の両辺を $\log T$ から s まで積分すると

$$\xi(s)\geq \xi(\log T)Te^{-s}, \qquad s\geq\log T$$

を得る。したがって，$w(t)$ は $w(t)\geq Tw(T)/t$ $(t\geq T)$ を満たす。 □

Lemma 2 の $w(t)$ と $Tw(T)/t$ から，Lemma 1 の条件を満たす方程式 (E) の supersolution と subsolution が構成することができる。したがって，方程式 (E) が振動しない解をもつための条件を得ることができる。

Theorem 1. 関数 p はある自然数 n に対して

$$0\leq p(x)\leq p_n(x), \qquad x\in\Omega, \tag{8}$$

を満たすとする。また，関数 ϕ は

$$0\leq \phi(x,u)\leq \frac{h(u)}{|x|^2}, \qquad x\in\Omega, \quad u\geq 0 \tag{9}$$

を仮定する。ただし，関数 $h(u)$ は局所的 Lipschitz 連続であり，$h(0)=0$ である。このとき，十分小さな $u>0$ に対して

$$\frac{h(u)}{u}\leq \frac{\lambda_N}{\{l_{n+1}(u^2)\}^2} \tag{10}$$

を満たすならば，方程式 (E) はある $b\geq a$ に対して

$$u(x)>0, \quad x\in G_b, \qquad \lim_{|x|\to\infty} u(x)=0$$

を満たす解 $u(x)$ をもつ。

Proof. 関数 g^* を

$$g^*(u)=\begin{cases} h(u)/4\lambda_N, & (u\geq 0)\\ -h(-u)/4\lambda_N & (u<0)\end{cases}$$

と定義する。このとき，条件 (10) から $u>0$ で十分小さいとき

$$\frac{g^*(u)}{u}=\frac{h(u)}{4\lambda_N u}\leq\frac{\lambda_N}{4\lambda_N\{l_{n+1}(u^2)\}^2}=\frac{1}{4\{l_{n+1}(u^2)\}^2}$$

なので，g^* は Lemma 2 の条件を満たす。よって，方程式

$$w''+\frac{2}{t}w'+\frac{1}{4t^2}S_n(t)w+\frac{1}{t^2}g^*(w)=0$$

はある $b\geq a$ に対して

$$w(t)\geq\frac{bw(b)}{t}>0\quad(t\geq b),\qquad\lim_{t\to\infty}w(t)=0$$

を満たす解 $w(t)$ をもつ。

条件 (8), (9) を用い，$\overline{u}(x)=v(r)=w(t),\ r=|x|,t=(N-2)r^{N-2}$ とおくと

$$\begin{aligned}&\Delta\overline{u}(x)+p(x)\overline{u}(x)+\phi(x,\overline{u}(x))\\ \leq&\Delta\overline{u}(x)+p_n(x)\overline{u}(x)+\frac{1}{|x|^2}h(\overline{u}(x))\\ =&\frac{d^2}{dr^2}v(r)+\frac{N-1}{r}\frac{d}{dr}v(r)+\frac{(N-2)^2}{4r^2}S_n((N-2)r^{N-2})v(r)+\frac{1}{r^2}h(v(r))\\ =&\frac{(N-2)^2}{r^2}\left[t^2w''(t)+2tw'(t)+\frac{1}{4}S_n(t)w(t)+g^*(w(t))\right]=0\end{aligned}$$

となる。したがって，$\overline{u}(x)$ は $G_b\cup C_b$ 上で方程式 (E) の正の supersolution となる。また，$\underline{u}(x)=bw(b)/t,\ r=|x|,t=(N-2)r^{N-2}$ とおくと

$$\begin{aligned}\Delta\underline{u}(x)+p(x)\underline{u}(x)+\phi(x,\underline{u}(x))\geq&\Delta\underline{u}(x)\\ =&\frac{(N-2)^2}{r^2}\left[t^2\left(\frac{bw(b)}{t}\right)''+2t\left(\frac{bw(b)}{t}\right)'\right]\\ =&\frac{(N-2)^2}{r^2}\left[t^2\frac{2bw(b)}{t^3}-2t\frac{bw(b)}{t^2}\right]=0\end{aligned}$$

なので，$\underline{u}(x)$ は $G_b\cup C_b$ 上で方程式 (E) の正の subsolution となる。さらに，Lemma 2 より

$$\underline{u}(x)=\frac{bw(b)}{t}\leq w(t)=\overline{u}(x),\qquad x\in G_b\cup C_b$$

なので，Lemma 1 から

$$0<\underline{u}(x)\leq u(x)\leq\overline{u}(x),\quad x\in G_b,\qquad\underline{u}(x)=u(x)=\overline{u}(x),\quad x\in C_b$$

を満たす方程式 (E) の解 $u(x)$ が存在する。また，条件 (7) より

$$\lim_{|x|\to\infty}\overline{u}(x)=\lim_{t\to\infty}w(t)=0$$

なので，$|x|\to\infty$ のとき $u(x)\to 0$ である。 □

方程式 (E) において線形の係数項 $p(x)$ を $p(x) = p_n(x)$, 摂動項 $\phi(x,u)$ を $\phi(x,u) = h(u)/|x|^2$ に制限した方程式

$$\Delta u + p_n(x)u + \frac{h(u)}{|x|^2} = 0 \tag{11}$$

を考える。関数 h が

$$\frac{h(u)}{u} = \frac{\lambda_N}{\{l_{n+1}(u^2)\}^2}, \qquad |u| > 0 : \text{十分小}$$

を満たすとき，Theorem 1 より方程式 (11) のある解は振動しない。しかし，関数 h が $\mu > \lambda_N$ に対して

$$\frac{h(u)}{u} = \frac{\mu}{\{l_{n+1}(u^2)\}^2}, \qquad u > 0 : \text{十分小}$$

を満たす場合は，条件 (10) が成り立たないので，Theorem 1 は使えない。実はこの場合，方程式 (11) のすべての解は振動する。実際，方程式 (E) に対して次の定理が成り立つ。

Theorem 2. ある自然数 n に対して

$$p(x) = p_n(x), \qquad x \in \Omega \tag{12}$$

であるとする。また，関数 ϕ に

$$\phi(x,u) \geq \frac{h(u)}{|x|^2} > 0, \qquad x \in \Omega, \quad u > 0, \tag{13}$$

$$\phi(x,-u) = -\phi(x,u), \qquad x \in \Omega, \quad u > 0 \tag{14}$$

を仮定する。ただし，関数 $h(u)$ は局所的 Lipschitz 連続であり，$h(0) = 0$ である。このとき，十分小さな $u > 0$ に対して

$$\frac{h(u)}{u} \geq \frac{\mu}{\{l_{n+1}(u^2)\}^2} \tag{15}$$

を満たす $\mu > \lambda_N$ が存在するならば，方程式 (E) のすべての解は振動する。

Remark. Theorem 1 と異なり Theorem 2 では，関数 $p(x)$ と $\phi(x,u)$ に α 次 Hölder 連続の仮定を設ける必要はない。

Theorem 2 を証明するためには，二つのことが必要である。一つ目は，常微分方程式

$$\frac{d}{dr}\left(r^{N-1}\frac{d}{dr}v\right) + r^{N-1}\left\{\frac{\lambda_N}{r^2}S_n\left((N-2)r^{N-2}\right)v + \frac{1}{r^2}h(v)\right\} = 0 \tag{16}$$

のすべての解が振動するための条件である。その条件は，Sugie [4, Theorem 2.1] が与えた次の結果から得ることができる。

Proposition 2. 条件 (4) を仮定する。このとき，十分小さな $|w| > 0$ に対して

$$\frac{g(w)}{w} \geq \frac{\nu}{\{l_{n+1}(w^2)\}^2} \tag{17}$$

を満たす $\nu > 1/4$ が存在するならば，方程式 (3) のすべての解は振動する。

Propositoin 2 を用いて方程式 (16) のすべての解が振動するための条件を与える。

Lemma 3. 条件 (4) を仮定する。このとき，十分小さな $|w|>0$ に対して条件 (15) を満たす $\mu>\lambda_N$ が存在するならば，方程式 (16) のすべての解は振動する。

Proof. 方程式 (16) に変数変換

$$w(t)=v(r),\quad t=(N-2)r^{N-2}$$

を行うと

$$\frac{dt}{dr}=(N-2)^2r^{N-3},\qquad \frac{d}{dr}v(r)=(N-2)^2r^{N-3}w'(t)$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\left(r^{N-1}\frac{d}{dr}v(r)\right)&=\frac{d}{dr}\left((N-2)^2r^{2N-4}w'(t)\right)\\&=(N-2)^2r^{N-3}\left(t^2w'(t)\right)'\\&=(N-2)^2r^{N-3}\left(t^2w''(t)+2tw'(t)\right)\end{aligned}$$

となる。ここで，$\lambda_N=(N-2)^2/4$ であることに注意すれば，方程式 (16) と方程式

$$t^2w''+2tw'(t)+\left\{\frac{1}{4}S_n(t)w+\frac{h(w)}{4\lambda_N}\right\}=0 \tag{18}$$

は同値であることがわかる。

関数 $\tilde{g}$, 定数 ν をそれぞれ，$\tilde{g}(x)=h(w)/4\lambda_N$, $\nu=\mu/4\lambda_N$ とおく。このとき，条件 (15) より $\tilde{g}(x)$ は

$$\frac{\tilde{g}(w)}{w}=\frac{h(w)}{4\lambda_N w}\geq\frac{\mu}{4\lambda_N\{l_{n+1}(w^2)\}^2}=\frac{\nu}{\{l_{n+1}(w^2)\}^2},\qquad \nu>\frac{1}{4},$$

すなわち，条件 (17) を満たす。よって，Propositoin 2 より方程式 (18) のすべての解は振動する。方程式 (16) と (18) は同値なので，方程式 (16) のすべての解も振動する。 □

二つ目は，方程式 (E) の正値解（または負値解）と方程式 (16) の正値解（または負値解）の関係である。そのことを調べるために

$$\Delta u+\psi(x,u)=0 \tag{19}$$

を考える。この方程式は定常状態における Schrödinger 方程式と呼ばれており，その研究は，振動問題に限っても数多くある。特に Emden-Fowler 方程式，すなわち $\psi(x,u)=k(x)u^\gamma$ を中心に議論することが多い [2, 5, 6]。

方程式 (19) の正値解と方程式

$$\frac{d}{dr}\left(r^{N-1}\frac{d}{dr}v\right)+r^{N-1}q(r)f(v)=0 \tag{20}$$

の正値解の関係は，Naito et al. [1] によってすでに示されている。

Theorem A. 条件

$$\psi(x,u) \geq q(|x|)f(u), \qquad x \in \Omega, \quad u > 0,$$

$$q \in C[a,\infty), \quad q(r) \geq 0 \ (r \geq a); \qquad f \in C(0,\infty), \quad f(u) > 0 \ (u > 0)$$

を仮定する。このとき，方程式 (19) がある外部領域 G_b $(b \geq a)$ で正値解 $u(x)$ をもつならば，方程式 (20) は $0 < v(r) < \min_{|x|=r} u(x)$ $(r \geq b)$ を満たす解 $v(r)$ をもつ。

方程式 (E) の正値解と方程式 (16) の正値解の関係についても，Theorem A と類似の結論を得ることができる。

Lemma 4. 条件 (12) と (13) を仮定する。ただし，関数 h は連続である。このとき，方程式 (E) がある外部領域 G_b $(b \geq a)$ で正値解 $u(x)$ をもつならば，方程式 (16) も $0 < v(r) < \min_{|x|=r} u(x)$ $(r \geq b)$ を満たす解 $v(r)$ をもつ。

Lemma 4 の証明は Theorem A の証明を少し変更すればよい。

Remark. 関数 ϕ が条件 (14) を満たすとき，方程式 (E) が外部領域 G_b $(b \geq a)$ で負値解 $u(x)$ をもつならば，方程式 (16) も $r \geq b$ において負値解をもつ。なぜならば，条件 (14) より $-u(x)$ は (E) の正値解になる。したがって，Lemma 4 より方程式 (16) は正値解 $v(r)$ をもつ。条件 (14) より条件 (13) の関数 h は $h(-u) = -h(u)$ $(u > 0)$ を満たすように取ることができる。よって，$-v(r)$ は方程式 (16) の負値解である。

Lemmas 3 and 4 を用いることによって，Theorem 2 を証明できる。

Proof of Theorem 2. 方程式 (E) がある外部領域 G_b で正値解をもつと仮定する。条件 (12) と (13) より Lemma 4 を用いると，方程式 (16) は $r \geq b$ で正値解をもつ。

一方，方程式 (16) は条件 (15) を満たすので，Lemma 3 より方程式 (16) のすべての解は振動する。これは矛盾である。

同様に，方程式 (E) が外部領域で負値解をもつ場合も矛盾を導くことができる。よって，方程式 (E) のすべての解は振動する。 □

References

[1] M. Naito, Y. Naito and H. Usami, *Oscillation theory for semilinear elliptic equations with arbitrary nonlinearities*, Funkcial. Ekvac. **40** (1997) 41–55.

[2] E.S. Noussair and C.A. Swanson, *Oscillation theory for semilinear Schorödinger equations and inequalities*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A **75** (1975/76) 67-81.

[3] E.S. Noussair and C.A. Swanson, *Positive solutions of quasilinear elliptic equations in exterior domains*, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980) 121–133.

[4] J. Sugie, *Oscillation criteria of Kneser-Hille type for second order differential equations with nonlinear perturbed terms*, to appear in Rocky Mountain J. Math.

[5] C.A. Swanson, *Semilinear second order elliptic oscillation*, Canad. Math. Bull. **22** (1979) 139-157.

[6] C.A. Swanson, *Criteria for oscillatory sublinear Schrödinger equations*, Pacific J. Math. **104** (1983) 483-493.